Um estudo sobre a continuidade e os números irracionais

Ana Carolina Schmitt de Amorim
Estudante do curso de Matemática-Licenciatura (UFMT/Cuiabá)
Email: ana.amorim2@sou.ufmt.br

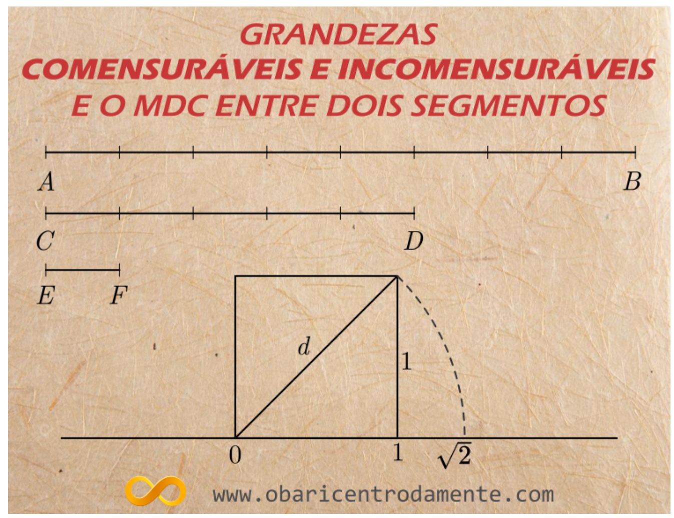
O texto em questão é um relato da minha experiência na Iniciação Científica, realizada na Universidade Federal de Mato Grosso na modalidade voluntariado (VIC) no ciclo de 2023-2024, sob orientação do Prof. Djeison Benetti. Este trabalho teve como objetivo o estudo aprofundado do texto fundacional de Richard Dedekind, *Continuidade e Números Irracionais*, e de outros textos relacionados, considerando que o curso de Matemática-Licenciatura não atribui ênfase significativa às obras clássicas.

O estudo detalhado desta temática é crucial para a fundamentação da matemática pura, uma vez que a recuperação de tais textos históricos proporciona uma compreensão mais profunda da construção do conhecimento matemático. Essas obras dão sentido ao saber matemático hoje, seja pela retomada das discussões históricas e filosóficas, seja pelo fato da construção dos números reais ser um marco para o desenvolvimento da Matemática e das ciências em geral.

A pesquisa, de natureza qualitativa, fundamentou-se em uma revisão bibliográfica aprofundada. Ao longo do período de vigência, foram realizados encontros semanais com o orientador para discussões e aprofundamento da temática. As discussões com o professor orientador possibilitaram o refinamento das questões centrais. Esses diálogos também ajudaram a identificar lacunas na minha compreensão a respeito de alguns conceitos importantes, o que nos guiou a buscar fontes adicionais e a revisão de traduções específicas da obra de Dedekind.

Na seleção das fontes bibliográficas, priorizamos aquelas que contribuíram significativamente para a compreensão histórica da construção dos números reais, com destaque para a descoberta da incomensurabilidade, a criação dos conjuntos dos números irracionais e a compreensão da essência da continuidade. Neste sentido, as discussões foram inicialmente estruturadas em torno da obra *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento de Jesus Caraça. Já a tradução da obra de Dedekind, feita por Augusto J. F. de Oliveira no livro *Dedekind e os números: antologia de textos fundacionais de Richard Dedekind*, foi central para as discussões acerca da formalização dos números reais e da continuidade.

Os resultados da pesquisa evidenciam o problema da medida, que consiste em determinar se é possível encontrar uma unidade comum, a parte alíquota, a fim de comparar diferentes segmentos de reta. Quando essa unidade não existe, esses segmentos são denominados incomensuráveis, cuja medida não pode ser expressa como razão de números inteiros. Essa limitação evidenciou a necessidade de expandir o conceito de número para além dos racionais.



Fonte: obaricentrodamente.com, 2023.

Neste contexto, ao se comparar os números racionais com a reta geométrica, verifica-se a existência de "lacunas", em que os racionais são insuficientes para "preencher" toda a reta. No século XIX, com a questão da grande indústria (evolução da química, física, biologia, etc.) houve a necessidade de medir grandezas cada vez menores: o movimento de navios e trens, a variação de comprimento de uma barra metálica com a temperatura, o crescimento de uma planta, as necessidades de medir grandezas microscópicas, etc. A questão principal, portanto, se resume em formalizar matematicamente a noção de uma variação que se faz por grandezas insensíveis. Isso se apresenta à Matemática sob a forma do **problema da continuidade** e está indissociavelmente ligado à construção dos números reais.

Teorema: *cada grandeza que cresce continuamente, mas não para além de todos os limites, deve certamente aproximar de um valor limite.*

Desde Newton e Leibniz, muitos resultados de cálculo foram considerados verdadeiros, mas sem uma prova rigorosa; eles eram vistos apenas de forma intuitiva, como o teorema acima. Este teorema dá uma condição suficiente para que uma sequência convirja. Foi tentando demonstrá-lo que Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação rigorosa de número real; mais precisamente, de uma resolução do problema da continuidade.

Dedekind propôs que cada número real poderia ser definido como um "corte" no conjunto dos números racionais. Um corte separa os números racionais em duas classes distintas e disjuntas, de modo que todos os números de uma classe são menores que os da outra. Essa ideia é central para fornecer uma definição precisa de número real e resolver o problema da continuidade. Um exemplo de corte nos números racionais ocorre quando a separação entre duas classes não corresponde a nenhum número racional específico. Esse elemento "faltante" é definido como um número irracional. Assim, os números irracionais são descritos como elementos de separação de um corte qualquer que "preenchem" todas as possíveis "lacunas" deixadas pelos racionais na reta numérica.

Definição: *chama-se número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais: se existe um número racional separando duas classes, o número real coincide com esse número racional; se não existe tal número, o número real diz-se irracional.*

Portanto, conclui-se que o problema da continuidade, presente em fenômenos como o movimento, é fundamental na matemática e nas ciências. Sua resolução exige um aprimoramento daquilo que foi inicialmente desenvolvido pelo Cálculo, resultando nos modernos conceitos de limites, continuidade, sequências e séries. A contribuição de Dedekind foi assim decisiva, pois permitiu uma definição precisa dos números reais e estabeleceu uma base sólida para a Análise Matemática. O teorema que Dedekind enunciou e provou pela primeira vez de maneira rigorosa é enunciado, atualmente, da seguinte maneira: *Toda sequência monótona limitada é convergente*. A noção de corte aparece implicitamente no **Axioma Fundamental da Análise Matemática**; axioma utilizado na demonstração deste teorema. ■